

非线性扰动方程方法在具有“on-off”振荡的变分资料同化中的可行性^{*}

郑 琴^{**} 戴 毅

解放军理工大学理学院, 南京 211101

摘要 针对一个含有“on-off”振荡的概念模式, 研究了非线性扰动方程的伴随方法(NPE方法)在含有“on-off”振荡的变分资料同化中的可行性与有效性. 对解析情形, 通过非线性扰动分析给出代价函数关于控制方程初值的梯度表达式并将结果用于同化. 比较同化数值实验结果表明: 当“on-off”振荡出现在控制方程中时, 用传统的伴随方法很难捕捉到目标函数的全局最小值点, 而用NPE方法, 资料同化基本都能给出全局极小值点.

关键词 “on-off” 开关 变分资料同化 伴随方法

在数值天气预报和气候诊断中, 对物理过程, 特别是湿物理过程的参数化, 会导致模式方程中的某些项关于时间或模式变量不连续或不可微. 这种现象通常被称为“on-off”开关问题. 在对含“on-off”开关的模式进行变分资料同化时, 由于系统的不可微性, 伴随方法能否有效发挥作用, 一直以来都是人们关注的问题. 由于问题的复杂性, 在对“on-off”开关问题的理论研究中, 人们总是对控制方程加一些限制条件以避免“on-off”振荡(也叫2倍 Δt 振荡)发生^[1-8], 但在实际的预报模式中, 当“on-off”开关反复被触动时, “on-off”开关过程的传统数值离散会导致模式的数值解中出现“on-off”振荡^[1], 对含有“on-off”振荡的问题进行研究不仅具有理论价值, 对实际预报模式中的“on-off”开关问题处理也有重要的指导意义.

在变分资料同化中, 相关代价函数的梯度计算是关键, 它将为同化中的极小化过程提供下降方向. 在使用伴随方法的变分资料同化中, 人们通过伴随模式的反向积分来获取梯度信息. 但当控制方程中含有不连续的“on-off”开关过程时, 相应的

切线性方程及伴随方程不存在, 因此在数值计算中, 如何构造切线性模式和伴随模式成为问题的焦点. 为此人们提出了各种处理方案, 一是忽略扰动对“on-off”开关时刻的影响, 即在切线性模式和伴随模式中, 取与非线性模式相同的“on-off”开关条件, 这种方法被称为传统的伴随方法或“Zou方法”^[4-9], 在实际应用中, 代价函数的梯度信息由伴随变量在初始时刻的表达式提供(沿用经典的伴随思想). 另一种是Xu提出的广义切线性和伴随方法^[2-3], 这种方法将 δ 函数引入到切线性模式和伴随模式中, 并针对前推模式中开关过程的不同数值处理, 用FM0-GCTLM0方法和FM1-GTLM1方法给出切线性模式和伴随模式. 在实际应用中, 由于广义函数的引进, 这种方法需要对已有的同化系统修改切线性模式和伴随模式. 除上述两种方法外, 也有学者提出光滑或规则化方法^[10-11]和置值伴随模式方法^[12]. 最近, Mu等^[5], Wang等^[7-13]针对一个含“on”开关的单格点模式, 提出了NPE方法, 该方法用非线性扰动方程取代切线性方程, 再通过伴随方法得到代价函数的梯度表达式, 它由两部分

2008-04-08 收稿, 2008-07-30 收修改稿

^{*} 中国科学院知识创新(批准号: KZCX3-SW-230)和国家自然科学基金(批准号: 40505013)资助项目

^{**} E-mail: qinzheng@mail.iap.ac.cn

©1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

组成, 一部分是由传统伴随方法给出的伴随变量在初始时刻的值, 另一部分与伴随变量在开关时刻的值有关, 它是对传统伴随方法算得的梯度的一个修正. 对仅含一个“on”开关的单格点模式, NPE方法在变分资料同化中, 不仅具有搜索到全局极小值的潜在优势, 而且极小化过程中的代价函数的梯度信息依然可由传统伴随方法获取的伴随模式计算, 显示了这种方法向实际预报模式的推广应用中的可行性. 本文的目的旨在探索当“on-off”振荡发生时, NPE方法在伴随变分资料同化中的可行性与有效性.

利用一个含有“on-off”振荡的概念模式, 文章在第一部分用扰动分析求出在解析情形下代价函数关于模式初值的梯度表达式, 为使用NPE方法的变分资料同化中的极小化过程提供下降方向. 在第二部分, 通过数值试验揭示“on-off”开关过程的传统数值处理在模式解中所产生的“on-off”振荡现象及代价函数的糟糕性态. 文章的第三部分是使用传统伴随方法和使用NPE方法的比较同化试验, 在这里我们运用前差、后差两种差分格式对控制方程进行离散, 将用传统伴随方法计算的梯度和用NPE方法计算的梯度分别用于优化, 从试验结果可明显看出, 无论采用哪种差分格式, NPE方法在含“on-off”振荡的变分资料同化中仍然显示出比传统方法更有效, 在文章的最后, 我们对本文的结果进行了简单的总结和讨论.

1 解析分析

考虑常微分方程

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = B - At + H_+(q - q_c)Gq \\ q|_{t=0} = q_0 \end{cases} \quad (1)$$

它描述了实际预报模式中单格点上比湿随时间的发展变化, 其中 A, B, G 均为常数, 且 $A > 0, B > 0, G < 0, H_+$ 为 Heaviside 函数, q_c 为阈值, 它是一个取定的常数. 为了保证同化窗口可以产生“on-off”振荡发生, 我们进一步假设 $B + Gq_c < 0$.

代价函数定义为

$$J(q_0) = \frac{1}{2} \int_0^T (q - q^{obs})^2 dt,$$

其中 $q = q(t)$ 为在同化时段 $[0, T]$ 内方程(1)的解, q^{obs} 是 q 的观测值. 在数值天气预报中, 代价函数度量了预报变量与观测值之间的偏差, 它关于初值 q_0 的梯度为变分资料同化中的优化算法提供下降方向. 由于方程(1)中含有不连续的“on-off”开关项, 因此我们首先讨论代价函数 J 关于 q_0 的梯度的存在性.

1.1 方程(1)的两个特殊初值 q_0^* , q_0^{**}

当方程(1)的初值取 $q_0^* = q_c - \frac{B^2}{2A} < q_c$ 时, 其解

$q(t)$ 在时刻 $t = \tau^* = \frac{B}{A}$ ($B - At = 0$) 处正好取到最大值 q_c , 见图1中实曲线所示, 在这种情形, 方程解在同化窗口只触动一次“on”开关.

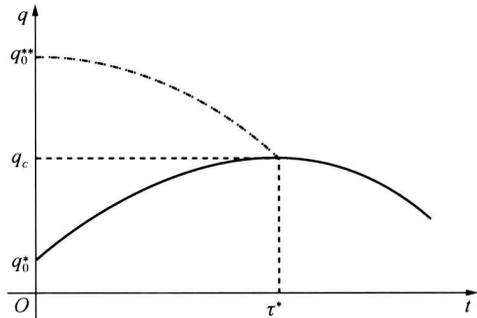


图1 两个特殊初值 q_0^* 和 q_0^{**} 所对应的方程解

对第二个初值 q_0^{**} , 它具有性质 $q_0^{**} > q_c$ 且当 $t = \tau^*$ 时, 对应的方程(1)的解 q 正好取值 q_c , 见图1中虚线所示. 在这种情形, 方程解在同化窗口只触动一次“off”开关.

当 $q_0 = q_0^{**}$ 时, 方程(1)在时间段 $[0, \tau^*]$ 内简化为

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = B - At + Gq \\ q|_{t=0} = q_0^{**} \end{cases}$$

解上述方程得 $q = \frac{At}{G} + \frac{A}{G^2} \frac{B}{G} + e^{Gt} (\frac{B}{G} - \frac{A}{G^2} + q_0^{**})$.

由 $q|_{t=\tau^*} = q_c$, 求得

$$q_0^{**} = \left(q_c - \frac{A}{G} \right) e^{\frac{-BG}{A}} + \frac{A}{G^2} - \frac{B}{G}.$$

由上面两种特殊情形, 我们选择可以产生“on-off”振荡的初值 q_0 的两个取值区间 $q_0^* < q_0 < q_c$ 和 $q_c < q_0 < q_0^{**}$ 来讨论代价函数 J 关于初值 q_0 的梯度存在性.

1.2 当 $q_0^* < q_0 < q_c$ 时梯度存在性分析

下面的图 2(a) 描绘了当方程(1)的初值 q_0 满足 $q_0^* < q_0 < q_c$ 时, 对应的解 $q(t)$ 随时间 t 的变化过程.

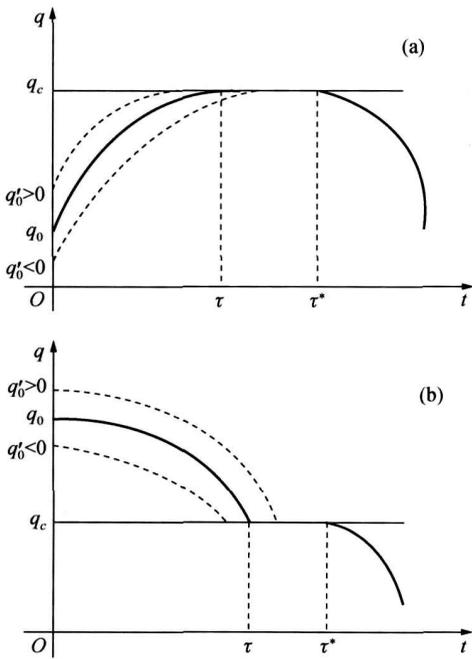


图 2 方程(1)的解(实线)及受扰动解(虚线)
(a) 对应初值 $q_0 < q_c$; (b) 对应初值 $q_0 > q_c$

由于 $q_0 < q_c$ 且当 $0 \leq t < \tau^*$, $B - At > 0$, 因此当方程解 $q(t)$ 触动“on-off”开关前, 它由下列方程确定

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = B - At & t \in [0, \tau), \\ q|_{t=0} = q_0 \end{cases} \quad (2)$$

其中 τ 满足: 当 $0 \leq t < \tau$ 时, $q(t) < q_c$ 且 $q|_{t=\tau} = q_c$.

当解在时刻 τ 首次触动“on-off”开关后, 由于时间段 $[\tau, \tau^*)$ 内 $B - At > 0$, 再由假设 $B + Gq_c$

< 0 , 因此当解 $q(t)$ 随时间的增加上升到阈值 q_c 时, “on-off”开关打开, 但由于 $B - At + Gq < B + Gq_c < 0$, 解 $q(t)$ 随时间的增加开始下降, “on-off”开关随后关闭, 此时又因 $B - At > 0$, “on-off”开关随后又被打开, 再由 $B - At + Gq < B + Gq_c < 0$, “on-off”开关又被关闭. 这种过程最终导致方程解始终保持在阈值上, 故在时间段 $[\tau, \tau^*)$ 上, $q(t)$ 满足下列方程

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = 0 & t \in [\tau, \tau^*) \\ q|_{t=\tau} = q_c \end{cases} \quad (3)$$

当 $\tau^* < t \leq T$ 时, 由于 $B - At < 0$, $G < 0$, 故 $q(t)$ 满足下列方程

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = B - At & t \in [\tau^*, T] \\ q|_{t=\tau^*} = q_c \end{cases} \quad (4)$$

为了讨论 J 关于初值 q_0 的梯度存在性, 我们给 q_0 叠加一个绝对值足够小的扰动 q'_0 , 使其满足 $q_0^* < q_0 + q'_0 < q_c$.

当扰动 $q'_0 < 0$ 时, 类似于对(2)–(4)式的分析, 受扰动的解满足下列方程

$$\begin{cases} \frac{d(q+q')}{dt} = B - At, & t \in [0, \tau') \\ q+q'|_{t=0} = q_0 + q'_0 \end{cases} \quad (5)$$

其中 τ' 满足: $q+q'|_{t=\tau'} = q_c$

$$\begin{cases} \frac{d(q+q')}{dt} = 0, & t \in [\tau', \tau^*) \\ q+q'|_{t=\tau'} = q_c \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{d(q+q')}{dt} = B - At, & t \in [\tau^*, T] \\ q+q'|_{t=\tau^*} = q_c \end{cases} \quad (7)$$

由(2)–(7)式知扰动解满足

$$\begin{cases} \frac{dq'}{dt} = 0, & t \in [0, \tau) \\ q'|_{t=0} = q'_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dq'}{dt} = B - At & t \in [\tau, \tau'] \\ q' |_{t=\tau} = q'_0 \\ \frac{dq'}{dt} = 0 & t \in [\tau', T] \\ q' |_{t=\tau'} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

记 q' 的伴随变量为 q^* , 上式两边乘以 $-q^*$, 分部积分得

$$\int_0^T \frac{dq'}{dt} (-q^*) dt = -q'(T)q^*(T) + q'_0 q^*(0) + \int_0^T q' \frac{dq^*}{dt} dt$$

$$\text{即 } \int_{\tau}^{\tau'} (B - At)(-q^*) dt = -q'(T)q^*(T) + q'_0 q^*(0) + \int_0^T q' \frac{dq^*}{dt} dt$$

$$\text{整理得 } -q'(T)q^*(T) + q'_0 q^*(0) + \int_{\tau}^{\tau'} (B - At)q^* dt =$$

$$- \int_0^T q' \frac{dq^*}{dt} dt,$$

$$\text{令伴随方程为 } \begin{cases} -\frac{dq^*}{dt} = D & T \geq t \geq 0, \text{ 其中} \\ q^* |_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$D = q - q^{\text{abs}}$$

$$\text{易知 } q^*(t) = \int_t^T D dt.$$

下面证明

$$\tau' - \tau = \frac{-q'_0}{B - A\tau} + o(q'_0), \quad (9)$$

其中 $o(q'_0)$ 表示初始扰动 q'_0 的高阶小量.

事实上 $\int_{\tau}^{\tau'} \frac{dq'}{dt} dt = q'(\tau') - q'(\tau)$, 由(8)式可得

$\int_{\tau}^{\tau'} (B - At) dt = 0 - q'_0$, 利用积分中值定理有 $(B - A\tau_a)(\tau' - \tau) = -q'_0$ ($\tau < \tau_a < \tau'$); 因为 $q'_0 \rightarrow 0$ 时, $\tau' \rightarrow \tau$, $\tau_a \rightarrow \tau$, 则 $\tau_a = \tau + \alpha$ (其中 α 为无穷小量), 代入上式即得(9)式结论. 又因为

$$\int_{\tau}^{\tau'} (B - At)q^* dt = (B - A\tau_c)q^*(\tau_c)(\tau' - \tau) \quad (\tau < \tau_c < \tau') \quad (10)$$

而 $q^*(\tau_c) = \int_{\tau_c}^T D dt = \int_{\tau}^T D dt + \int_{\tau_c}^{\tau} D dt = q^*(\tau) + D(\tau_a)(\tau - \tau_c)$ ($\tau < \tau_a < \tau_c < \tau'$), 由(5)式有 $\tau_a - \tau < \tau_c - \tau < \tau' - \tau = O(q'_0)$, 其中 $O(q'_0)$ 表示初始扰动 q'_0 的同阶小量, 所以

$$q^*(\tau_c) = q^*(\tau) + O(q'_0) \quad (11)$$

因为

$$\Delta J = J(q_0 + q'_0) - J(q_0) = \int_0^T q'D dt + \frac{1}{2} \int_0^T (q')^2 dt$$

又由(8), (9)式知 $q' = O(q'_0)$, 将 $D = -\frac{dq^*}{dt}$ 代入上式, 可得

$$\Delta J = q'_0 q^*(0) + \int_{\tau}^{\tau'} (B - At)q^* dt + o(q'_0). \quad (12)$$

将(9), (10)和(11)式代入(12)式可得

$$\begin{aligned} \Delta J &= q'_0 q^*(0) + (B - A\tau_c)[q^*(\tau) + O(q'_0)] \cdot (\tau' - \tau) + o(q'_0) = \\ &= q'_0 q^*(0) + (B - A\tau)[q^*(\tau) + o(q'_0)] \cdot \left[\frac{-q'_0}{B - A\tau} + o(q'_0) \right] + o(q'_0) = \\ &= q'_0 q^*(0) - q^*(\tau)q'_0 + o(q'^2_0) \end{aligned}$$

$$\text{所以: } J'_-(q_0) = q^*(0) - q^*(\tau) = \int_0^{\tau} D dt. \quad (13)$$

当初始扰动 $q'_0 > 0$ 时, 仿照 $q'_0 < 0$ 的情形可得下列扰动方程

$$\begin{cases} \frac{dq'}{dt} = 0 & t \in [0, \tau'] \\ q' |_{t=0} = q'_0 \\ \frac{dq'}{dt} = -(B - At) & t \in [\tau', \tau] \\ q' |_{t=\tau} = q'_0 \\ \frac{dq'}{dt} = 0 & t \in [\tau, T] \\ q' |_{t=\tau} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$-q'(T)q^*(T) + q'_0 q^*(0) + \int_{\tau'}^{\tau} (-B + At)q^* dt = - \int_0^T q' \frac{dq^*}{dt} dt$$

$$\text{令伴随方程为} \begin{cases} -\frac{dq^*}{dt} = D & T \geq t \geq 0, \\ q^* |_{t=T} = 0 \end{cases}$$

则 $q^*(t) = \int_t^T D dt$. 又

$$\Delta J = q'_0 q^*(0) + \int_\tau^t (B - At) q^* dt = q'_0 q^*(0) - q^*(\tau) q'_0 + o(q'^2_0),$$

所以 $J'_+(q_0) = q^*(0) - q^*(\tau) = \int_0^\tau D dt$.

比较(13)式可得: $J'(q_0) = q^*(0) - q^*(\tau) =$

$$\int_0^\tau D dt.$$

1.3 当 $q_c < q_0 < q_0^{**}$ 时梯度存在性分析

当初值 q_0 满足 $q_c < q_0 < q_0^{**}$ 时, 对应的方程(1)的解 $q(t)$ 随时间 t 的变化过程如图 2(b)所示, 完全类似 1.2 小节中的分析, 方程(1)可分解为

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = B - At + Gq & t \in [0, \tau) \\ q |_{t=0} = q_0 \\ \frac{dq}{dt} = 0 & t \in [\tau, \tau^*) \\ q |_{t=\tau} = q_c \\ \frac{dq}{dt} = B - At & t \in [\tau^*, T] \\ q |_{t=\tau^*} = q_c \end{cases} \quad (15)$$

给 q_0 叠加一个绝对值足够小的扰动 q'_0 , 使其仍满足 $q_c < q_0 + q'_0 < q_0^{**}$.

当初始扰动 $q'_0 < 0$ 时, 受扰动方程为

$$\begin{cases} \frac{d(q+q')}{dt} = B - At + G(q+q'), & t \in [0, \tau') \\ q+q' |_{t=0} = q_0 + q'_0 \\ \frac{d(q+q')}{dt} = 0, & t \in [\tau', \tau^*) \\ q+q' |_{t=\tau'} = q_c \\ \frac{d(q+q')}{dt} = B - At, & t \in [\tau^*, T] \\ q+q' |_{t=\tau^*} = q_c \end{cases} \quad (16)$$

由(15), (16)式得非线性扰动方程

$$\begin{cases} \frac{dq'}{dt} = Gq', & t \in [0, \tau') \\ q' |_{t=0} = q'_0 \\ \frac{dq'}{dt} = -(B - At + Gq'), & t \in [\tau', \tau) \\ q' |_{t=\tau'} = e^{G\tau'} q'_0 \\ \frac{dq'}{dt} = 0, & t \in [\tau, T] \\ q' |_{t=\tau} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

记 q' 的伴随变量为 q^* , 上式两边乘以 $-q^*$, 分部积分得

$$\begin{aligned} & -q'(T)q^*(T) + q'_0 q^*(0) + \int_0^{\tau'} q' \frac{dq^*}{dt} dt + \int_{\tau'}^{\tau} q' \frac{dq^*}{dt} dt + \int_{\tau}^T q' \frac{dq^*}{dt} dt = \\ & \int_0^{\tau'} \frac{dq'}{dt} (-q^*) dt + \int_{\tau'}^{\tau} \frac{dq'}{dt} (-q^*) dt + \int_{\tau}^T \frac{dq'}{dt} (-q^*) dt - \\ & q'(T)q^*(T) + q'_0 q^*(0) = \\ & \int_0^{\tau'} q' (-Gq^* - \frac{dq^*}{dt}) dt + \int_{\tau'}^{\tau} q' (-\frac{dq^*}{dt}) dt + \\ & \int_{\tau}^T (B - At + Gq + Gq') q^* dt \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{令伴随方程为} \begin{cases} -\frac{dq^*}{dt} = D & (T \geq t \geq \tau), \\ q^* |_{t=T} = 0 \\ -\frac{dq^*}{dt} = Gq^* + D & (\tau > t \geq 0) \\ q^* |_{t=\tau} = q^*(\tau) \end{cases}$$

易知 $q^*(t) = \int_t^T D dt, (T \geq t \geq \tau)$

$$q^*(t) = e^{G(\tau-t)} \left[\int_t^{\tau} e^{G(\tau-t)} D dt + q^*(\tau) \right], \quad (\tau > t \geq 0)$$

$$q^*(0) = \int_0^{\tau} e^{Gt} D dt + e^{G\tau} q^*(\tau) \quad (19)$$

类似(9)式的证法可证得 $\tau - \tau' = \frac{e^{G\tau} q'_0}{Gq_c + B - A\tau} +$

$o(q'_0) (q'_0 \rightarrow 0)$

利用中值定理有

$$\int_{\tau'}^{\tau} (B - At + Gq + Gq') q^* dt =$$

$$[B - A\tau_c + Gq(\tau_c)]q^*(\tau_c)(\tau - \tau') + Gq'(\tau_d)q^*(\tau_d)(\tau - \tau')$$

其中 $\tau' < \tau_c < \tau$, $\tau' < \tau_d < \tau$ (20)

当 $q_0' \rightarrow 0$ 时, $\tau' \rightarrow \tau_c$, $\tau_c \rightarrow \tau$, $\tau_d \rightarrow \tau$, $q^*(\tau_c) \rightarrow q_c$, 由(19)式有

$$q^*(\tau_c) = e^{G\tau_c} \left[\int_{\tau_c}^{\tau} e^{G(\tau-t)} D dt + q^*(\tau) \right] = q^*(\tau) + O(q_0')$$

因为 $q'(\tau_d) \sim O(q_0')$, $\tau - \tau' \sim O(q_0')$, 故 $Gq'(\tau_d)q^*(\tau_d)(\tau - \tau') \sim O(q_0'^2)$.

将上述分析结果代入(20)可得

$$\int_{\tau'}^{\tau} (B - At + Gq + Gq')q^* dt = e^{G\tau} q^*(\tau) q_0' + O(q_0'^2)$$

由(18), (19)式有

$$J'_-(q_0) = q^*(0) - e^{G\tau} q^*(\tau) = \int_0^{\tau} e^{Gt} D dt. \quad (21)$$

当初始扰动 $q_0' > 0$ 时, 类似的分析可得:

$$J'_+(q_0) = q^*(0) - e^{G\tau} q^*(\tau) = \int_0^{\tau} e^{Gt} D dt$$

因此 $J'(q_0) = q^*(0) - e^{G\tau} q^*(\tau) = \int_0^{\tau} e^{Gt} D dt$.

2 “on-off” 振荡及代价函数的性态

当控制方程(1)中的“on-off”开关在同化窗口中反复被触动时, 若“on-off”开关过程按传统方法数值离散, 则模式(1)的数值解中会产生“on-off”振荡. Xu在文献[1]中对“on-off”振荡产生的原因和机制进行了直观而详细的说明. 这里我们用前差和后差两种差分格式分别将模式(1)离散化, 对应于前差的离散模式为

$$\begin{aligned} \text{若 } q_{k-1} < q_c, \text{ 则 } q_k &= q_{k-1} + (B - At_{k-1})\Delta t; \\ \text{若 } q_{k-1} \geq q_c, \text{ 则 } q_k &= q_{k-1} + (B - At_{k-1} + Gq_{k-1})\Delta t, \end{aligned}$$

其中 $\Delta t = T/N$, $t_{k-1} = (k-1)\Delta t$, $1 \leq k \leq N$. 对应于后差的离散模式为

$$\begin{aligned} \text{若 } q_{k-1} < q_c, \text{ 则 } q_k &= q_{k-1} + (B - At_k)\Delta t; \\ \text{若 } q_{k-1} \geq q_c, \text{ 则 } q_k &= q_{k-1} + (B - At_k + Gq_k)\Delta t. \end{aligned}$$

取模式中的参数分别为: $A = 3.8$, $B = 1.7$, $G = -4.3$, $q_c = 1.7$, $q_0^{obs} = 3.0$, 同化窗口取为 $[0, 1]$, 即 $T = 1.0$, 时间步长 $\Delta t = T/N = 0.01$, 即 $N = 100$. 当 $q_0 = 1.5 (< q_c)$ 和 $2.05 (> q_c)$ 时, 前差模式的数值解如图3所示, 显然数值解中有明显的“on-off”振荡(由于前差和后差的离散结果相近, 这里只给出前差结果).

为进一步了解当前推模式的数值解中出现“on-off”振荡时, 相应的离散代价函数随前推模式初值的变化性态, 这里采用文献[5]和[12]中的方法对一组相继变化的初值 $q_0 = 0.01 \times i$ ($i = 0, 1, \dots, 1000$), 求出相应的代价函数值, 其结果如图4所示, 可明显看出它有多个局部极小值点和间断点.

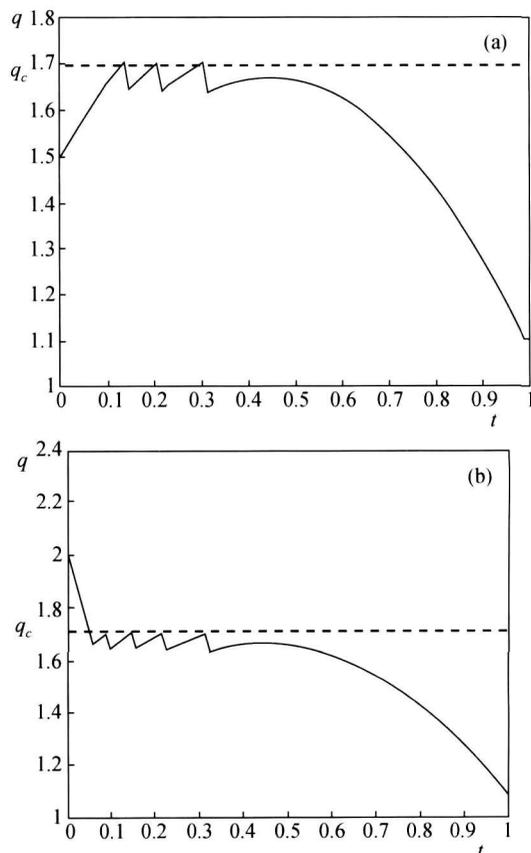


图3 相应于两个特殊的初值, 模式(1)的数值解
(a) 初值为 $q_0 = 1.50$; (b) 初值为 $q_0 = 2.05$

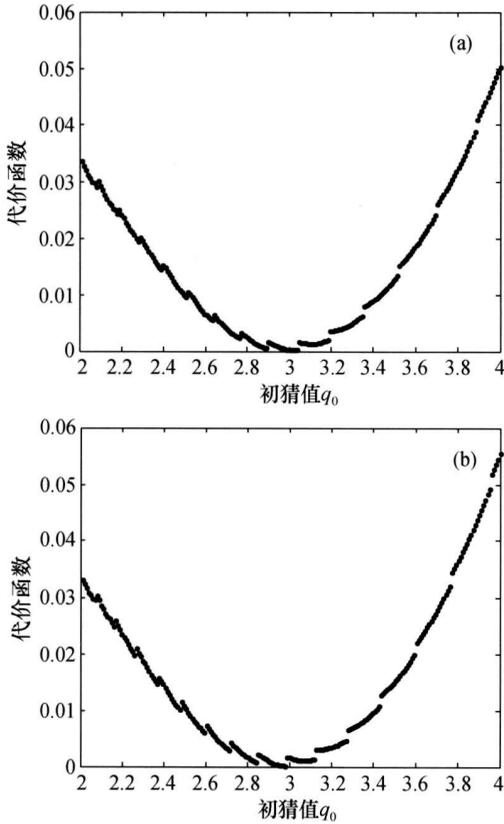


图4 代价函数随模式初值的变化性态
(a) 相应前差; (b) 相应后差

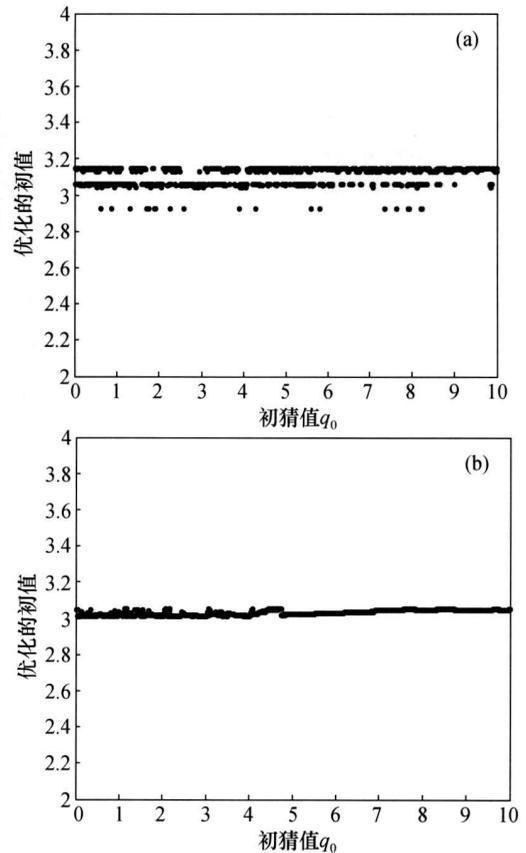


图5 前推模式由前差给出时, 1001个同化试验中, 优化的初值随初猜值的变化情况
(a) 传统伴随方法所得梯度的优化初值(纵坐标)与对应的初猜值(横坐标); (b) 与(a)相同, 只是同化中的梯度由NPE方法计算

3 变分同化比较试验

在文献[5]和[12]中, 理论分析和数值试验均显示用NPE方法所求出的梯度是对传统方法所得梯度的修正, 它总能为变分资料同化中的极小化过程提供正确的搜索方向, 找到全局极小值点. 为了检验当模式解中出现“on-off”振荡时(此时代价函数的性态更为恶劣), NPE方法的有效性, 同时说明NPE方法较传统伴随方法优越, 我们将图4显示的实验中的1001个模式初值 $q_0 = 0.01 \times i$ ($i = 0, 1, \dots, 1000$) 分别作为初猜值进行了变分同化试验, 试验中, 针对两种差分格式(前差和后差), 我们将两种方法(传统伴随方法和NPE方法)所得的梯度分别用于优化, 其中的观测资料 q_k^{obs} 取为以 q_0^{obs} 为初值的方程(1)的解析解在第 k 个时间层上的值, 其他参数与图3显示的试验一致, 相应于前差和后差的结果分别展示在图5和图6中.

图5显示用传统的伴随方法给出的同化结果有两个局部极小值, 而用NPE方法所得的同化结果基本上都是全局极小值.

图6显示用传统的伴随方法给出的同化结果有三个局部极小值, 而用NPE方法所得的同化结果全部是全局极小值.

此外, 我们对同化结果作了进一步统计分析, 结果显示(见下表), 在1001个同化试验中, NPE方法给出的同化结果与全局极小值 q_0^{obs} 的方差仅为0.204(对应于前差的前推模式)和0.026(对应于后差的前推模式), 它们远小于传统伴随方法给出的同化结果与全局极小值 q_0^{obs} 的方差2.483(对应于前差的前推模式)和4.366(对应于后差的前推模式).

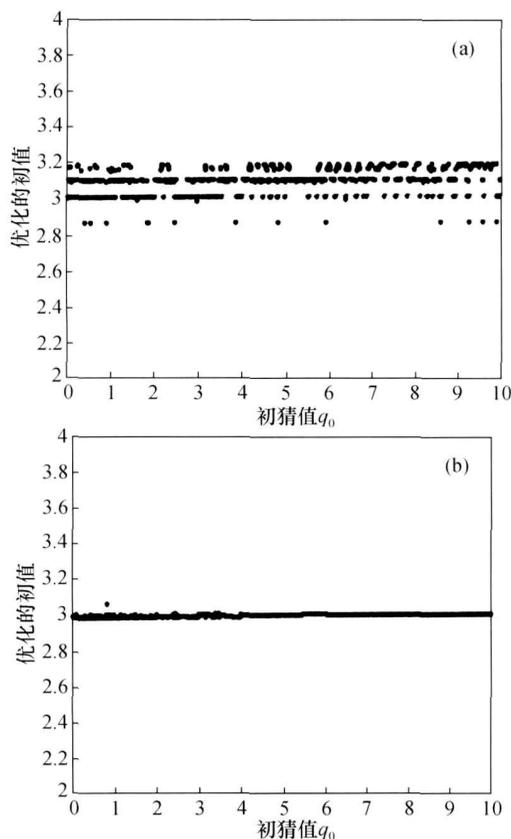


图6 与图5相同, 但前推模式由后差给出

表 同化结果统计分析

项目	前 差		后 差	
	传统方法	NPE 方法	传统方法	NPE 方法
全局极小值	3.00	3.00	3.00	3.00
均值	3.107105659	3.035352643	3.100716902	3.000418562
方差	2.482739027	0.203744311	4.366432059	0.025575537

4 结论

本文利用一个描述单格点上比湿随时间发展的理想的简单模式, 研究了“on-off”开关过程的传统数值处理所导致的“on-off”振荡对伴随变分资料同化的影响及NPE方法的有效性. 首先通过扰动分析, 给出了代价函数关于模式初值的梯度存在性及其精确表达式. 紧接着通过数值试验揭示前推模式的数值解中的“on-off”振荡会导致相应的代价函数糟糕的性态. 为了检验NPE方法的有效性, 文中使用了两种差分方案对控制方程进行离散, 并将传统方法获取的梯度与NPE方法所得的梯度分别用于优化. 比较同化数值试验结果显示在没有模

式误差和观测误差时(因为本文的焦点是研究“on-off”振荡对NPE方法在伴随变分资料同化中的有效性的影响, 因此这里没有考虑模式误差及观测误差), 尽管“on-off”振荡会导致相应的代价函数具有糟糕的性态(具有多个局部极小值点和不连续点), NPE方法在变分资料同化中仍然能够捕捉到全局极小值点, 显示出它比传统方法更有效.

参 考 文 献

- Xu Q. Generalized adjoint for physical processes with parameterized discontinuities. Part I: Basic issues and heuristic examples. *J Atmos Sci*, 1996, 53(8): 1123–1142
- Xu Q. Generalized adjoint for physical processes with parameterized discontinuities. Part IV: Problems and treatment in time discretization. *J Atmos Sci*, 1997, 54: 2722–2728
- Xu Q, Gao JD, Gu W. Generalized adjoint for physical processes with parameterized discontinuities. Part V: Coarse-grain adjoint and problems in gradient check. *J Atmos Sci*, 1998, 55: 2130–2135
- Zou X. Tangent linear and adjoint of “on-off” processes and their feasibility for use in 4-dimensional variational data assimilation. *Tellus*, 1997, 49A(1): 3–31
- Mu M, Wang JF. A method for adjoint variational data assimilation with physical “on-off” processes. *J Atmos Sci*, 2003, 60(16): 2011–2018
- Mu M, Zheng Q. Zigzag oscillations in variational data assimilation with physical “on-off” processes. *Mon Wea Rev*, 2005, Vol 133: 2711–2720
- Wang JF, Mu M, Zheng Q. Initial condition and parameter estimation in physical “on-off” processes by variational data assimilation. *Tellus*, 2005, 57A: 736–741
- Zheng Q, Mu M. The effects of the model errors generated by discretization of “on-off” processes on VDA. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2006, 13(3): 309–320
- Zou X, Navon IM, Sela JG. Variational data assimilation with moist threshold processes using the NMC spectral model. *Tellus*, 1993, 45A: 370–387
- Zupanski D. The effect of discontinuities in the Betts-Miller cumulus convection scheme on four-dimensional data assimilation. *Tellus*, 1993, 45A: 511–524
- Zupanski D, Mesinger F. Four-dimensional variational assimilation of precipitation data. *Mon Wea Rev*, 1995, 123: 1112–1127
- Zhu J, Masafumi K, Zhou GQ. Nonsmooth optimization approaches to VDA of models with on/off parameterizations: Theoretical issues. *Adv Atmos Sci*, 2002, 19(3): 405–424
- Wang JF, Mu M, Zheng Q. Adjoint approach to VDA of “on-off” processes based on nonlinear perturbation equation. *Progress in Natural Science*, 2002, 12(11): 869–873